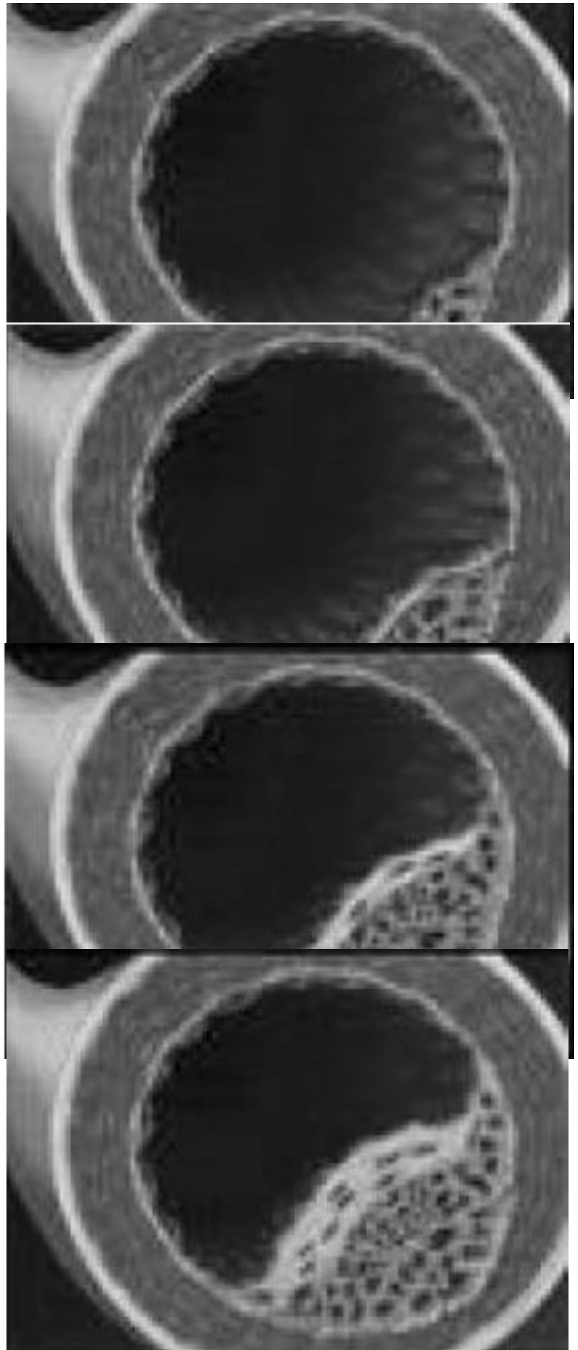
Damascus University
Higher Institute of Earthquake Studies and Researches

Continuum Mechanics- Elasticity and Plasticity

Lec.08 **Kinematics of Continua**

مقدمة:



إذا توجب علينا إصلاح أو استبدال شريان دم في جسم إنسان فيجب أن نفهم وظيفة الشريان الأساسي كما يجب أن نفهم الظروف التي أدت إلى عطبه. الشريان ينقل الدم من القلب إلى سائر أنحاء الجسم. في ظروف مثل ضغط الدم العالي وزيادة الكولسترول في الدم يمكن أن يؤدي إلى ترسيب جزيئات على جدار الشريان. مع الوقت وتجمع هذه الجزيئات على جدران الشرايين تتصلب و تتضيق, وتؤدي إلى أمراض متعلقة بتصلب الشرايين. من العلاجات الممكنة هو بإصلاح أو استبدال الجزء المتضرر من الشريان. وهذا بدوره يتطلب فهم التشوهات والإجهادات المتولدة في جدران الشرايين مع تدفق الدم. ثم يستخدم هذا الفهم في تصميم جزء الشريان الصنعي.

يختص هذا الفصل من المنهاج في دراسة التغيرات الهندسية في وسط مستمر (كالشريان مثلا) والذي يكون في حالة التوازن الساكن أو الديناميكي

إن دراسة التغيرات الهندسية في أي وسط بغض النظر عن القوى التي أحدثت التغيرات يعرف بعلم الحركة Kinematics

توصيفات الوسط المستمر:

- إذا اعتبرنا جسم $\mathcal{B}$ ذو هندسة معلومة . ويخضع لقوانين محددة وحمولات معلومة في فضاء إقليدي $\Re^3$
- يمكن النظر إلى $\mathcal{B}$ كمجموعة من الجزيئات كل منها يحتوي على عدد كبير من الذرات, لها استمرارية لتوزع المادة في المكان والزمان.
- من أجل شكل هندسي وتحميل ما سيخضع الجسم $\mathcal{B}$ إلى تغيرات هندسية على نطاق شمولي Macroscopic ضمن الجسم (نطاق شمولي يخرج عن مستوى الذرات microscopic ليؤثر على المادة كإستمرارية) وهو ما يدعى بالتشوه. هذا التشوه يترافق مع إجهادات ضمن الجسم.
- إذا كانت الحمولات المؤثرة تعتمد على الزمن , تصبح تشوهات الجسم تابع للزمن وهو ما يعني تغير مستمر لهندسة الجسم $\mathcal{B}$ مع الزمن .
- إذا طبقت الحمولات ببطء بحيث أصبحت التشوهات خاضعة للحمولات فقط, فسيشغل الجسم تسلسلاً متواصلاً من الحيزات الهندسية.
- الحيز المشغول من قبل الوسط المستمر في لحظة زمنية t يدعى بالتشكيل ويرمز κ . وبالتالي تدعى المواضع الآنية المشغولة في فضاء $\Re^3$ من قبل نقاط المادة للجسم المستمر $\mathcal{B}$ وفي لحظات مختلفة من الزمن بالتشكيلات (configurations).

توصيفات الوسط المستمر:

- لنفرض أن الجسم المستمر يشغل ابتداءً التشكيل κ_0 وفيه تكون الجزيئات X تشغل الموضع $\mathbf{X}$ في فضاء كارتيزي (X_1, X_2, X_3) لاحظ أن X هو اسم الجزيئات التي تشغل الموضع $\mathbf{X}$ في التشكيل κ_0 ولذلك فالمركبات (X_1, X_2, X_3) تلقب بمركبات المادة.
- بعد تطبيق الحمولات يغير الوسط المستمر شكله الهندسي ليشغل التشكيل κ الذي يدعى التشكيل الحالي أو التشكيل المتشوه.
- الجزيئات X تشغل الآن الموضع $\mathbf{x}$ في التشكيل المتشوه κ كما هو واضح بالشكل.
- التحويل التخطيطي (mapping) $\chi : \mathcal{B}_{\kappa_0} \rightarrow \mathcal{B}_{\kappa}$

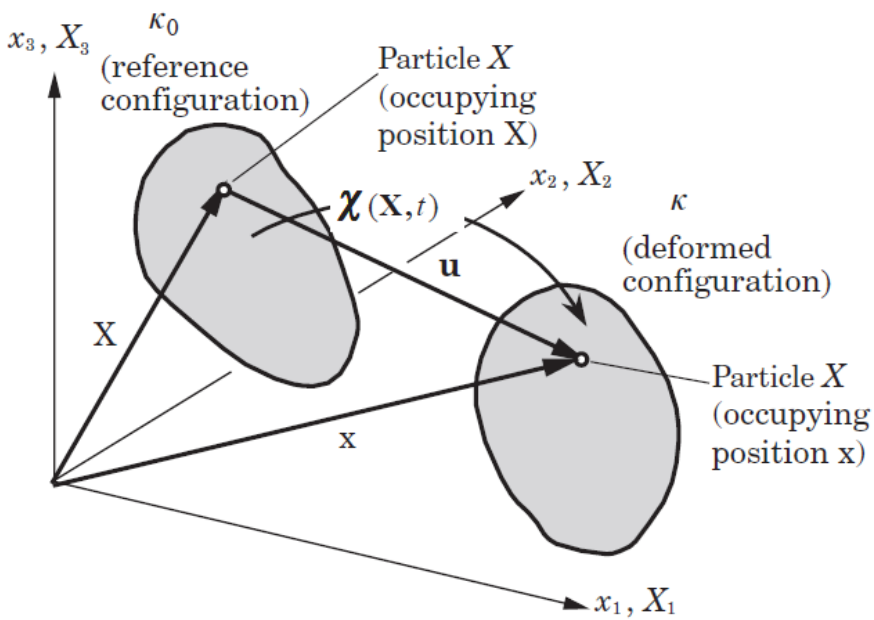
يسمى بالتحويل التشوهي *deformation mapping*

للجسم $\mathcal{B}$ من κ_0 إلى κ .

التحويل التشوهي $\chi(\mathbf{X})$ يأخذ بشعاع الموضع $\mathbf{X}$

من التشكيل المرجعي ويضع نفس النقطة في

تشكيل متشوه لتصبح $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$



- إطار مرجعي سيتم اتخاذه بشكل صريح أو ضمني لوصف التشوه. سنستخدم نفس الإطار المرجعي لكلا التشكيلين المرجعي والحالي للجسم.

توصيفات الوسط المستمر:

- المركبات X_i و x_i للأشعة $\mathbf{X} = X_i\,\hat{\mathbf{E}}_i$ و $\mathbf{x} = x_i\,\hat{\mathbf{e}}_i$ هي موازية لمحاور الإحداثيات المستخدمة.
- نفترض أن مبادئ أشعة الأساس $\hat{\mathbf{E}}_i$ و $\hat{\mathbf{e}}_i$ متلاقية في نقطة واحدة.
- التوصيف الرياضي لتشوه جسم مستمر يتبع واحد من المنطلقين التاليين:

1. التوصيف المادي Material description
2. التوصيف المكاني Spatial description

- يشتهر التوصيف المادي أيضاً بتوصيف لاغرانج Lagrangian والتوصيف المكاني يشتهير أيضاً بتوصيف أويلر Eulerian,

التوصيف المادي
Lagrangian Description

- في التوصيف المادي يشار إلى حركة الجسم عبر تشكيل مرجعي κ_R والذي بدوره غالباً ما يختار ليكون التشكيل الغير متشوه. $\kappa_R = \kappa_0$
- وبالتالي في توصيف لاغرانج يعبر عن المركبات الحالية $(\mathbf{x} \in \kappa)$ بدلالة المركبات المرجعية $(\mathbf{X} \in \kappa_0)$

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$$

وإن توصيف تغير متحول نموذجي ϕ على الجسم بدلالة إحداثيات المادة $\mathbf{X}$ والزمن t $\phi = \phi(\mathbf{X}, t)$

- من أجل قيمة ثابتة لـ $\mathbf{X}$ $(\mathbf{X} \in \kappa_0)$ فإن $\phi(\mathbf{X}, t)$ يعطي القيمة ϕ

في زمن t متعلق بنقطة المادة الثابتة ذات X

الموضع $\mathbf{X}$ في التشكيل المرجعي كما في:

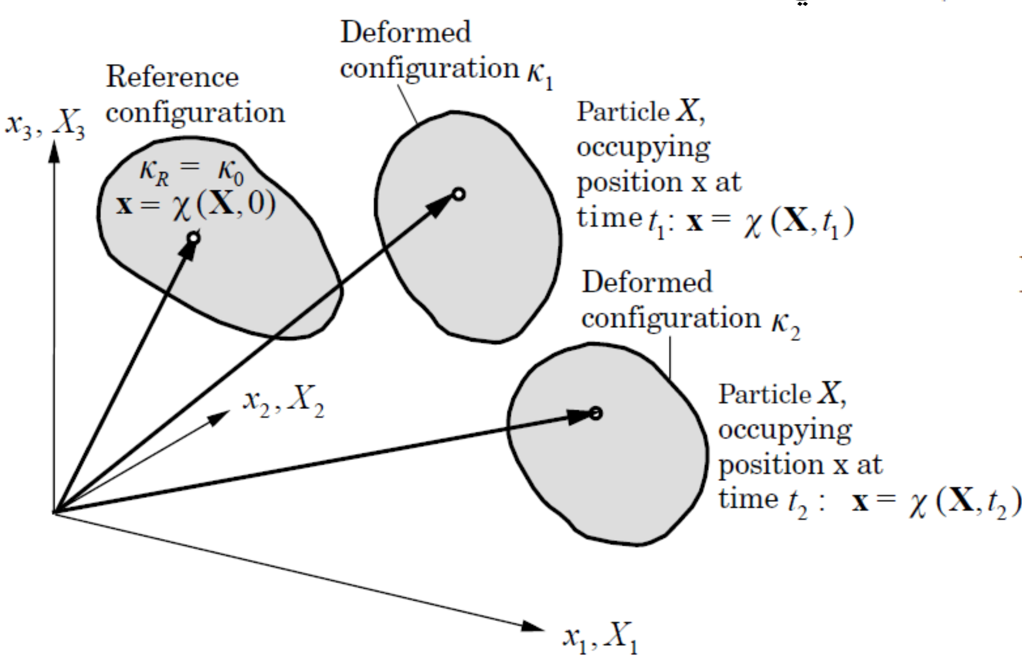
- لذلك فتغير في الزمن t يوحي بأن نفس

الجزيء X من نفس المادة يشغل موضعاً $\mathbf{X}$

في التشكيل κ_0 له قيمة مختلفة في ϕ

لذلك يتركز الإهتمام على جزيئات المادة X

من الجسم المستمر.

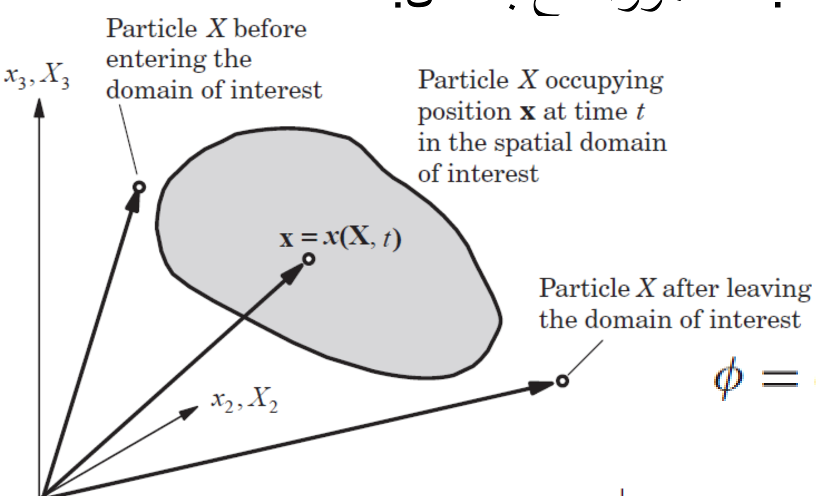


التوصيف المكاني
Eulerian Description

- في التوصيف المكاني الحركة يشار إليها بالتشكيل الحالي κ المشغول بالجسم $\mathcal{B}$ ويوصف ϕ بالعودة إلى الموضع الحالي $(\mathbf{x} \in \kappa)$ في الفراغ والمشغول حالياً بجزيئات المادة X :

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

- الإحداثيات $\mathbf{x}$ يصطلح بتسميتها «الإحداثيات المكانية» (spatial coordinates). ومن أجل قيمة ثابتة لـ $\mathbf{x} \in \kappa$ فإن $\phi(\mathbf{x}, t)$ تعطي القيم ϕ المترافقة مع النقطة الثابتة $\mathbf{x}$ في الفراغ والتي ستكون هي القيمة لـ ϕ المترافقة مع جزيئات مختلفة من المادة عبر أزمنة مختلفة , لأن نقاط مختلفة من المادة تشغل الموضع $\mathbf{x} \in \kappa$ في أزمنة مختلفة. كما هوواضح بالشكل:



- وبذلك فإن تغيراً t بالزمن يشير إلى قيم مختلفة لـ ϕ ستلحظ عند نفس الموضع المكاني $\mathbf{x} \in \kappa$ المشغول حالياً ربما بجزيء مادة مختلف هو X. لذلك فالإنتباه يتركز على الموضع المكاني $\mathbf{x} \in \kappa$.
- عندما تكون ϕ معروفة في التوصيف المادي $\phi = \phi(\mathbf{X}, t)$ يكون تفاضلها بالنسبة للزمن هو مجرد تفاضلها الجزئي بالنسبة للزمن لأن إحداثيات المادة $\mathbf{X}$ لا تتغير مع الزمن.

$$\frac{d}{dt}[\phi(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\mathbf{X}, t)]\Big|_{\mathbf{x}\ \text{fixed}} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

التوصيف المكاني
Eulerian Description

- عندما تعرف ϕ في التوصيف المكاني $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ فمشتقها بالنسبة للزمن والذي يعرف أيضاً بمشتق المادة material derivative هو:

$$\frac{d}{dt}[\phi(\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial x_i}[\phi(\mathbf{x}, t)]\frac{dx_i}{dt}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi,$$

حيث $\mathbf{v}$ هي السرعة $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \dot{\mathbf{x}}$. على سبيل المثال, تسارع جزيء يعطى بـ:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad \left(a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

مثال:

هذا المثال يوضح كيفية تحديد مقلوب تحويل تخطيطي mapping وحساب مشتق المادة الزمني من أجل تابع معطى.

- افرض أن الحركة لوسط مستمر $\mathcal{B}$ توصف بالتحول التخطيطي: $\chi : \kappa_0 \rightarrow \kappa:$

$$\chi(\mathbf{X}, t) = (X_1 + At\,X_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (X_2 - At\,X_1)\hat{\mathbf{e}}_2 + X_3\,\hat{\mathbf{e}}_3$$

والحرارة θفي الوسط المستمر معطاة بالتوصيف المكاني بالعلاقة: $\theta(\mathbf{x}, t) = x_1 + t x_2$

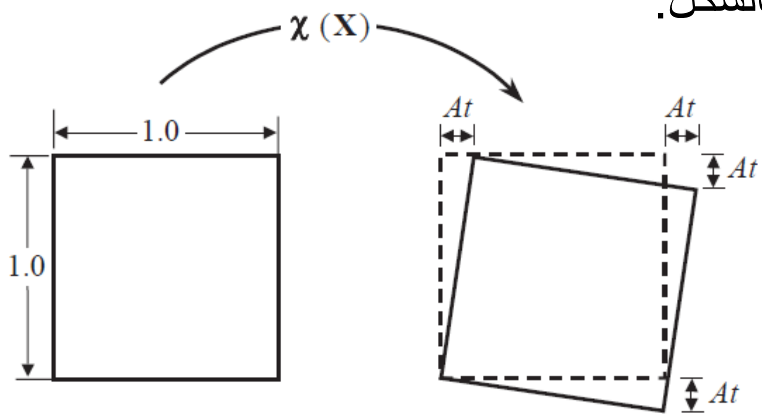
- أوجد 1- مقلوب هذا التحويل التخطيطي.

2- سرعة المركبات

3- مشتقات θ بالنسبة للزمن من أجل التوصيفين.

الحل:

إن التحويل التخطيطي يعطي بأن المربع الواحدي (طول أضلاعه تساوي الواحدة) يتحول إلى مستطيل يميل بدوران ذو اتجاه عقارب الساعة كما هو مبين بالشكل:



1. التحويل المقلوب يعطى بـ: $\chi^{-1} : \kappa \to \kappa_0$

$$\chi^{-1}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{x_1 - Atx_2}{1 + A^2t^2}\right)\hat{\mathbf{E}}_1 + \left(\frac{x_2 + Atx_1}{1 + A^2t^2}\right)\hat{\mathbf{E}}_2 + x_3\,\hat{\mathbf{E}}_3$$

2. شعاع السرعة يعطى بـ: $\mathbf{v} = v_1\hat{\mathbf{E}}_1 + v_2\hat{\mathbf{E}}_2$ حيث: $v_1 = \frac{dx_1}{dt} = AX_2, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -AX_1$

3. معدل تغير حرارة جزيئات المادة في الجسم $\mathcal{B}$ مع الوقت هو ببساطة:

$$\frac{d}{dt}[\theta(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\theta(\mathbf{X}, t)]\bigg|_{\mathbf{X}\ \text{fixed}} = -2AtX_1 + (1 + A)X_2$$

ومن ناحية ثانية فإن معدل تغير الحرارة عند موضع $\mathbf{x}$ بالنسبة للزمن والذي يحجزه الجزيء X هو:

$$\frac{d}{dt}[\theta(\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial\theta}{\partial t} + v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = x_2 + v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot t$$

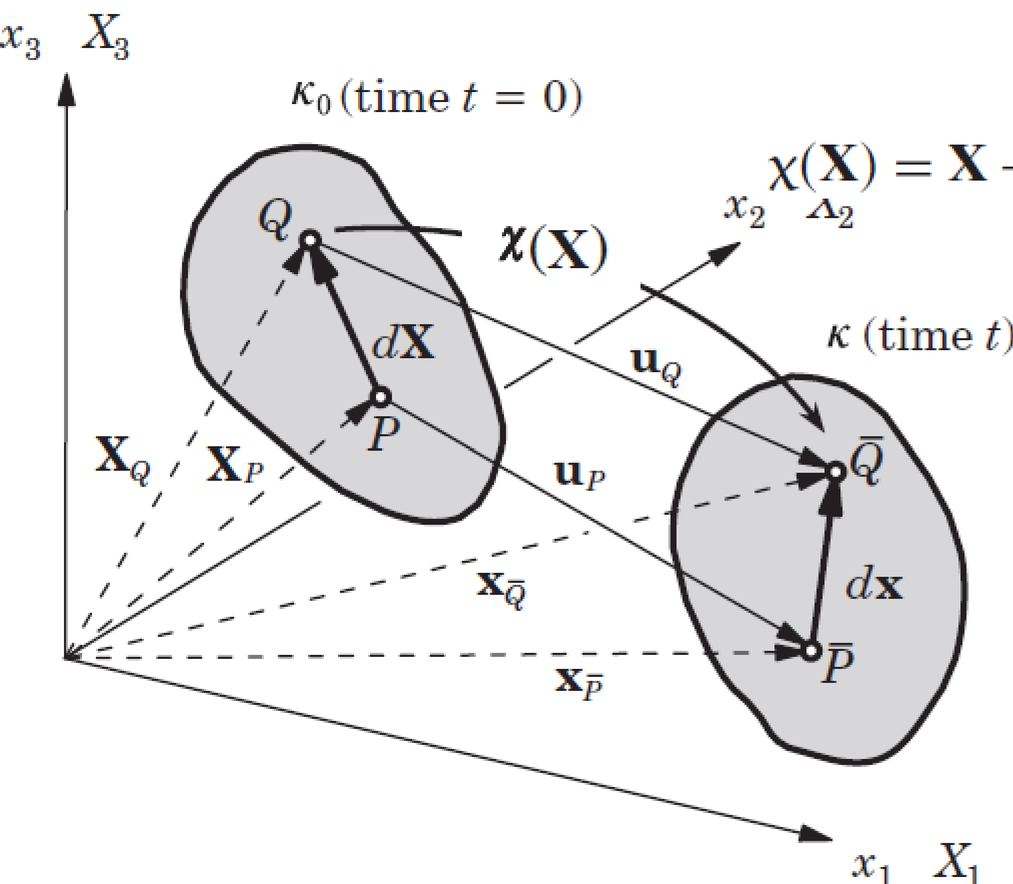
$$= -2AtX_1 + (1 + A)X_2.$$

- في دراسة الأجسام الصلبة يكون التوصيف المكاني (Eulerian Description) أقل فائدة حيث أن التشكيل κ مجهول. من ناحية أخرى هذا التوصيف هو المفضل من أجل دراسة حركة السوائل لأن التشكيل يكون معلوماً ويبقى من غير تغيير, ونرغب بمعرفة التغيرات في سرعات السائل, الضغط, الكثافة وهكذا.
- لذلك ففي التوصيف المكاني يكون التركيز منصباً على مكان محدد من الفراغ عوضاً عن جسم محدد من مادة.

حقل الإنتقالات
Displacement Field

- تشير عبارة تشوه الوسط المستمر إلى الإنتقالات النسبية والتغيرات في هندسة جسم مستمر $\mathcal{B}$ تحت تأثير نظام قوى ما. انتقال الجزيء X معطى كما هو واضح بالشكل بالعلاقة:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$



- في التوصيف اللاغرانجي تكون الإنتقالات مكتوبة بدلالة مركبات المادة X_i

$$\chi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$$

إذا علمت انتقالات كل جزيء في الجسم $\mathcal{B}$ نستطيع أن ننشيء التشكيل الحالي κ من التشكيل المرجعي κ_0 $\chi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$

على كلٍ في التوصيف الأويلري تكون الانتقالات مكتوبة بدلالة المركبات المكانية x_i

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

حقل الإنتقالات

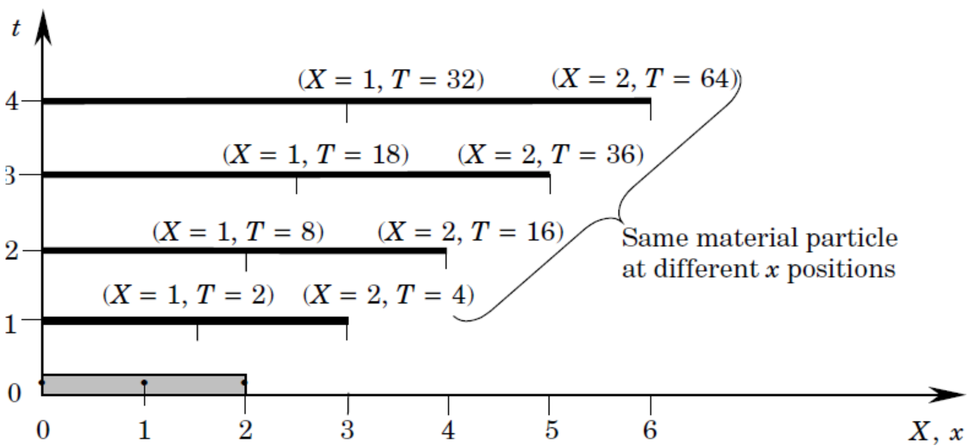
Displacement Field

حركة الجسم الصلب هي الحركة التي تنتقل فيها جميع جزيئات الجسم المستمر $\mathcal{B}$ بنفس المقدار الخطي والزاوي. أما الجسم القابل للتشوه فهو الجسم الذي تنتقل جزيئاته بحركة نسبية بالنسبة لبعضها.

وبذلك يمكن تحديد تشوه وسط مستمر فقط باعتبار التغير في المسافة بين أي نقطتين قريبتين بشكل متناهي مختارتين كيفياً منه.

لتوضيح الفارق بين الوصفين بشكل أكبر , لنعتبر التحويل التخطيطي أحادي البعد $x = X(1+0.5t)$ الذي يعرف الحركة لقضيب ذو طول ابتدائي مقداره واحدتين. يخضع القضيب إلى توزع حراري T معطى بالتوصيف المادي $T = 2Xt^2$ أو بالتوصيف المكاني $T = xt^2/(1+0.5t)$ كما هو مبين:

من الشكل , تبقى الإحداثيات المادية للجزيئات المرمزة X متعلقة بالجزيء نفسه بينما يتغير الموضع المكاني x .يمكن إيجاد الحرارة عند زمن ما بطريقتين:



مثال عندما $t = 3$ الجزيء المرمز $X = 2$

تكون عنده الحرارة $T = 2 \times 2(3)^2 = 36$

وبشكل بديل فالحرارة عند نفس الجزيء

والذي عند زمن $t = 3$ يكون في الموضع

تكون $x = 2(1+0.5\times 3) = 5$

$$T = 2 \times 5(3)^2/(1+0.5\times 3) = 36$$

إن انتقال نقطة مادة تشغل الموضع X في κ_0 يكون: $u(X,t) = x - X = X(1+0.5t) - X = 0.5Xt$